

課題番号	Q19T-09
課題名（和文）	帯行列固有値問題に対する分割統治法の最適分割手法の構築
課題名（英文）	Study on Optimal Dividing Strategy in the Divide-and-Conquer Algorithm for Banded Eigenvalue Problems
研究代表者	所属（学部、学科・学系・系列、職位） 未来科学部 情報メディア学科 助教 氏名 廣田 悠輔
共同研究者	所属（学部、学科・学系・系列、職位） 未来科学部 情報メディア学科 4年生 氏名 藤田 悠資
	所属（学部、学科・学系・系列、職位） 氏名
	所属（学部、学科・学系・系列、職位） 氏名
	所属（学部、学科・学系・系列、職位） 氏名
	所属（学部、学科・学系・系列、職位） 氏名

研究成果の概要（和文）
帯行列固有値問題に対する分割統治法の計算量を厳密最小化ならび近似最小化する分割ツリーの探索手法を開発した。厳密最小化する分割ツリーは、行列の次数 n に対して $O(n^3)$ の探索時間で求められる。また、近似最小化する分割ツリーの探索には $O(n \log n)$ の時間を要する。いずれの方法で求めた分割ツリーも、分割統治法の計算量を劇的に削減することができる。特に近似最小化する分割ツリーの探索手法は、その探索にかかる時間が非常に短いため、より高い実用性をもつと考えられる。

研究成果の概要（英文）
We developed two methods for finding a tree which (sub-)minimizes the number of floating-point operations (FLOPs) of a divide-and-conquer (DC) algorithm for banded eigenvalue problems. One of the methods finds the tree which exactly minimizes the FLOPs of the DC algorithm in $O(n^3)$, where n is the matrix dimension. The other finds a tree which approximately minimizes the FLOPs in $O(n \log n)$. Both methods drastically reduce the FLOPs of the DC algorithm. The latter is more practical since it requires a much shorter optimization time than the former.

1. 研究開始当初の背景

帯行列固有値問題の求解は、様々な科学技術計算において重要な役割を果たす行列計算のひとつである。帯行列固有値問題がそのままの形で現れる科学技術アプリケーションにおいてはもちろん、密行列固有値問題の求解における基礎部品としても、帯行列固有値問題に対するソルバは重要である。特に近年では、計算機の CPU の演算性能の向上に対してデータ転送性能が緩やかな傾向にあるため、密行列固有値問題の求解における帯行列固有値問題ソルバの重要性が高まる傾向にある。このため、多くの科学技術計算の高度化のためには、帯行列固有値問題に対する高速な求解手法の開発が急務である。

2. 研究の目的

帯行列固有値問題に対する最も有力な数値解法の一つである分割統治法（固有値問題における分割統治法は、アルゴリズムのクラスを意味するものではなく 1980 年に Cuppen によって提案された固有値解法とその派生アルゴリズムを指す）の高速化を研究する。分割統治法では与えられた行列を再帰的に分割して分割ツリーを構築し、次数の小さい葉問題の固有値問題を解き、その解を再帰的にマージすることで元の固有値問題を解く。我々は、分割統治法のアルゴリズムを改良することにより、その計算量（および実行時間）を削減することを目指す。

3. 研究の方法

計算量（および実行時間）の少ない分割統治法を実現するため、本研究では分割統治法内の分割ツリー生成の自由度に着目する。分割統治法における再帰的分割では、行列の分割次数は任意に決めることができ、その分割次数の決定によって分割統治法全体の計算量が大きく変化する。そこで、計算量が少なくなる分割ツリーを探索する問題を離散最適化問題として定式化し、その効率的な探索アルゴリズムを開発する。

最適化問題の定式化にあたっては、デフレーションと呼ばれる処理が実施されないという仮定のもと計算量のモデル化を行う。その結果に基づいて、厳密最小化ならび近似最小化のアルゴリズムを開発する。厳密最小化アルゴリズムの開発では、分割ツリーの部分木に対する最適化問題（部分問題）の結果を再利用できる点に着目し、動的計画法の適用を試みる。また、近似最小化アルゴリズムについては、前述の方法により求めた計算量を厳密最小化するツリーの性質を分析し、容易に最適化可能な局所目的関数を設計して貪欲法を適用することにより、高速かつ近似最小化を実現する。

4. 研究成果

行列の次数 n に対して $O(n^3)$ の探索時間で厳密に計算量を厳密最小化する分割ツリーを探索する方法および、 $O(n \log n)$ の探索時間で分割統治法の計算量を近似最小化する分割ツリーを探索する手法が実現された。いずれの方法で求めた分割ツリーでも、分割統治法の計算量は従来の分割ツリーと比べて大きく削減された。厳密最小化するツリーの探索は、探索に要する時間が計算量の削減量に見合わないため実用性は低いものの、最適分割ツリーの性質の分析に不可欠な情報をもたらした。また、近似最小化するツリーの探索は十分高速であり、実用的な分割統治法の高速化を実現できるものとなった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 0 件）

〔学会発表〕（計 1 件）

- ① 廣田悠輔, 「実対称帯行列の固有値問題に対する分割統治法の分割戦略」, 情報処理学会第 169 回ハイパフォーマンスコンピューティング研究会 (HPC169), 海洋研究開発機構 (JAMSTEC) 横浜研究所, 横浜市, 2019 年 5 月 10 日.

〔図書〕（計 0 件）